SOPRA LE SERIE QUADRATICHE DI CONICHE INVILUPPANTI LA QUARTICA PIANA.

Nota

del prof. EDGARDO CIANI

I.

OSSERVAZIONI SOPRA LE SERIE QUADRATICHE ∞^1 DI CONICHE.

1. — Una serie quadratica ∞^1 di coniche si può rappresentare mediante l'equazione

$$\lambda^2 a^2_x + 2\lambda b^2_x + c^2_x = 0$$

dove λ è il parametro della serie e $a^2_x = 0$, $b^2_x = 0$, $c^2_x = 0$ sono coniche le quali non appartengono al medesimo fascio. Il sistema lineare di dimensione minima che contiene la serie è la rete

$$\alpha a^2_x + \beta b^2_x + \gamma c^2_x = 0 .$$

Alla serie è coordinata la quartica

$$f = (b^2_x)^2 - a^2_x \,.\, c^2_x = 0$$

che è l'inviluppo delle coniche della serie. Le due coniche $a^2_x = 0$, $c^2_x = 0$ appartengono alla serie; la $b^2_x = 0$ non vi appartiene ma è legata alle prime due dalla proprietà di contenerne gli otto punti di contatto con la quartica f.

In tutto quel che segue, parlando di serie ∞^1 quadratiche di coniche, sottintenderemo sempre le qualifiche di *quadratiche* e di *semplicemente infinite* dicendo *serie* senz'altro.

2. — Date due coniche qualunque della serie

$$\lambda_1{}^2 a^2_x + 2\lambda_1 b^2_x + c^2_x = 0 , \qquad \lambda_2{}^2 a^2_x + 2\lambda_2 b^2_x + c^2_x = 0$$

individuate dai valori λ_1, λ_2 del parametro λ, l'equazione della conica che passa per gli otto punti di contatto delle prime due con la quartica f è:

$$\lambda_1 \lambda_2 a^2_x + (\lambda_1 + \lambda_2) b^2_x + c^2_x = 0$$

per cui l'equazione della serie può scriversi

$$\{ \lambda_1^2 a^2_x + 2 \lambda_1 b^2_x + c^2_x \} \lambda^2 + 2 \lambda \{ \lambda_1 \lambda_2 a^2_x + (\lambda_1 + \lambda_2) b^2_x + c^2_x \} +$$
$$+ \lambda_2^2 a^2_x + 2 \lambda_2 b^2_x + c^2_x = 0$$

e l'equazione della quartica f così:

$$(\lambda_1^2 a^2_x + 2 \lambda_1 b^2_x + c^2_x) (\lambda_2^2 a^2_x + 2 \lambda_2 b^2_x + c^2_x) -$$
$$- \{ \lambda_1 \lambda_2 a^2_x + (\lambda_1 + \lambda_2) b^2_x + c^2_x \}^2 = 0$$

la quale dimostra come due coniche qualunque della serie tocchino la quartica f in otto punti appartenenti a una terza conica.

3. — Segue che data una conica

$$\alpha a^2_x + \beta b^2_x + \gamma c^2_x = 0$$

appartenente alla rete ma non alla serie, essa può sempre pensarsi come quella che contiene gli otto punti di contatto con la quartica, di due coniche della serie. Infatti, per trovarne i parametri corrispondenti basta risolvere l'equazione di 2° grado

$$\gamma z^2 - \beta z + \alpha = 0 .$$

Fa eccezione il caso in cui si hanno due radici uguali: ma allora si vede subito che il parametro corrispondente individua una conica della serie. Cioè:

Una qualsiasi conica della rete individuata dalla serie, o appartiene alla serie, o altrimenti è collegata a due coniche della serie così da contenerne gli 8 punti di contatto con la quartica.

4. — Esiste una conica-luogo che è armonica rispetto a tutte le coniche delle serie riguardate come inviluppo (*).

Ma nella serie vi sono 6 coppie di rette. Dunque:

I sei punti doppi delle sei coppie di rette esistenti in una serie

---

(*) Caporali, *Sulla teoria delle curve piane del 4° ordine.* (Volume delle Memorie, pag. 364).

quadratica di coniche appartengono a una stessa conica: alla conica armonica a tutte le coniche della serie.

5. — Al teorema precedente si può dare anche un'altra forma. Per questo consideriamo la rete:

$$\alpha\, a^2_x + \beta\, b^2_x + \gamma\, c^2_x = 0$$

come rete di coniche polari rispetto a una cubica. Se un punto si muove lungo una conica c, la conica polare descrive una serie quadratica, la quale, a sua volta, individua la propria conica armonica c' e si vede subito che la jacobiana della rete taglia le due coniche c e c' in coppie di punti corrispondenti. Il che può esprimersi così:

I sei punti corrispondenti a quelli nei quali una conica non degenere taglia l'hessiana di una cubica appartengono a lor volta a un'altra conica.

Oppure:

Data una conica e una cubica, se si prendono i sei tangenziali dei punti comuni alle due curve e da essi si conducono le altre 18 tangenti alla cubica, i diciotto punti di contatto vengono a esser distribuiti sopra tre coniche.

6. — Ritornando alle sei coppie di rette esistenti in una serie, osserveremo che in generale due di tali coppie non possono avere una retta comune. Infatti, se questo accadesse, la rete cui appartiene la serie potrebbe porsi sotto la forma

$$\alpha\, x_1\, x_2 + \beta\, x_2\, x_3 + \gamma\, \theta = 0$$

dove θ è una conica non degenere. Ma allora si vede subito che dalla jacobiana della rete si stacca il fattore $x_2 = 0$: la rete non è più generale.

7. — Riassumendo le poche osservazioni precedenti, enumeriamo qui le curve principali coordinate a una serie quadratica di coniche e di cui ci varremo essenzialmente per lo studio della quartica:

1.° La conica sostegno della serie,

2.° La conica armonica alla serie,

3.° La cubica di cui la rete che contiene la serie è rete di coniche polari,

4.° La hessiana di questa cubica, jacobiana della rete,

5.° La quartica inviluppo delle coniche della serie.

II.

LE 63 SERIE DI CONICHE QUADRITANGENTI A UNA QUARTICA PIANA.

8. — È noto che " data una conica quadritangente a una quartica, qualsiasi conica che passa per i 4 punti di contatto, taglia ulteriormente la quartica in altri 4 punti che sono punti di contatto di un'altra conica con la quartica medesima (*). Da cui segue che: " La condizione necessaria e sufficiente perchè due coniche appartengano alla medesima serie è che gli 8 punti di contatto si trovino sopra una medesima conica. „

Onde si ricava anche:

" Una conica quadritangente appartiene a una serie e a una sola. „

In particolare:

" Una qualunque coppia di bitangenti individua una e una sola serie a cui appartiene. „

Viceversa una serie contiene 6 coppie di bitangenti.

Dunque:

Esistono $\frac{1}{6}\frac{28.27}{2} = 63$ *serie di coniche quadritangenti* (**).

E per il teorema del § 4:

I punti d'incontro delle bitangenti giacciono a sei, a sei sopra 63 coniche armoniche alle serie precedenti (**).

9. — Vogliamo ora vedere se si possano considerare le coniche d'una serie come coniche polari dei punti di una curva φ rispetto a una curva ψ nei due seguenti casi che forse sono i soli possibili, almeno finchè la ψ è generale del suo ordine:

1.° La φ sia una conica e la ψ uua cubica.

2.° La φ sia una retta e la ψ una quartica.

Vedremo facilmente come il problema possa essere risoluto in entrambi i casi e quindi ne nasceranno due definizioni della quartica stessa collegati alle curve φ e ψ.

(*) HESSE, *Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung*. Crelle, Bd. 49.

(**) Questi due teoremi si trovano per la prima volta e senza dimostrazione in STEINER, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierten Grades*. Crelle, Bd. 55.

10. Nel 1° caso la soluzione è semplicissima e nota. Sia:

$$\lambda^2 a^2{}_x + 2\lambda b^2{}_x + c^2{}_x = 0$$

una delle serie di coniche inviluppanti la quartica. Essa appartiene alla rete:

$$\alpha a^2{}_x + \beta b^2{}_x + \gamma c^2{}_x = 0$$

la quale è rete di coniche polari rispetto a una cubica ψ. Per scriverne l'equazione sotto forma opportuna prendiamo per triangolo di riferimento quello costituito dai tre poli di $a^2{}_x = 0$, $b^2{}_x = 0$, $c^2{}_x = 0$. Allora sarà:

$$\psi = x_1 a^2{}_x + x_2 b^2{}_x + x_3 c^2{}_x = 0$$

e la conica φ sostegno della serie sarà rappresentata da

$$\varphi = 4 x_1 x_3 - x_2{}^2 = 0$$

e quindi è manifesto che la serie data è costituita da tutte e sole le coniche polari dei punti φ rispetto a ψ.

Una quartica generale può sempre considerarsi come l'inviluppo delle coniche polari dei punti di una conica rispetto a una cubica, o come il luogo di un punto la cui retta polare rispetto a una cubica tocca una conica (*). Per brevità chiameremo le curve φ e ψ le *curve direttrici* della quartica, e *coniche generatrici* quelle della serie. Le curve φ e ψ sono legate da questa proprietà che è evidente e che ci occorrerà nel seguito:

Se c_1, c_2 sono due coniche della serie e quindi polari dei punti M_1, M_2 di φ; la conica che passa per gli otto punti di contatto di c_1 e c_2 con la quartica è polare del punto d'incontro delle tangenti a φ in M_1, M_2.

11. — Ogni serie di coniche quadritangenti individua una cubica e una conica direttrici. Viceversa: *dico che due curve φ e ψ appartengono a una sola serie.*

Infatti: è intanto evidente che le medesime ψ e ψ non possono essere relative a due serie diverse; ma neppure può darsi che due

(*) SALMON, *Curve piane*, § 254. — GERBALDI, *L'equazione di 24° grado da cui dipende la ricerca dei flessi nella curva generale del 4° ordine.* Rend. Circ. Mat. Palermo, 1893.

serie posseggano la medesima curva ψ e due diverse φ_1 e φ_2 quando si pensi che la conica direttrice è l'inviluppo delle rette polari rispetto a ψ dei punti della quartica.

Rimane a dimostrare che due serie diverse non possono avere a comune la curva φ, a meno che, s'intende, la quartica generata, non si particolarizzi. Per dimostrarlo ci varremo qui di una osservazione che sarà esposta in seguito (§ 20) e consiste in questo:

Indichiamo, secondo la notazione del Salmon, con $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \varphi, \psi$, le 28 bitangenti; ogni serie di coniche inviluppanti la quartica contiene 6 coppie di bitangenti distinte così che due coppie non possono avere neppure una bitangente comune (§ 6): ebbene, prese due qualunque serie esse hanno o 4, o 6 bitangenti comuni: nel 1° caso sono del tipo:

$$(ab, cd, ef, gh, ij, kl); \quad (ac, bd, mn, op, qr, st)$$

nel 2° caso sono:

$$(ab, cd, ef, gh, ij, kl); \quad (am, cn, eu, gx, iz, k\psi).$$

Cominciamo dal dimostrare che due serie del 1° tipo non possono avere a comune la conica φ. Per questo intenderemo definita la 1ª serie dalle due coniche di essa ab, cd e la seconda da ac, bd; la conica che ne contiene i punti di contatto sia la V. Per trovare le equazioni delle cubiche direttrici ψ e ψ_1 delle due serie basta prendere (§ 10) per triangolo fond. nel 1° caso i poli M, N, P di ab, V, cd rispetto a ψ, e nel 2° i poli $M', N' P'$ di ac, V, bd rispetto a ψ_1. Sieno x, y le coordinate dei due sistemi. Avremo:

$$\psi(x) = x_1\, ab + x_2\, V + x_3\, cd = 0$$
$$\psi_1(y) = y_1\,(ac) + y_2\,(V) + y_3\,(bd) = 0$$

dove (ac), (V), (bd) indicano le equazioni di ac, V, bd nelle coordinate y.

Introduciamo ora l'ipotesi che la curva φ sia la medesima per le due serie. Ciò significa che sulla φ oltre trovarcisi i punti M, P, ci sono anche i punti M', P' essendo rispettivamente N e N' i punti d'incontro delle tangenti in M e P, in M' e P' (§ 10). Dico intanto che M' P' N' coincidono con M, N, P. Infatti l'equazioni di φ riferite all'uno e all'altro triangolo sono:

$$4\, x_1 x_3 - x_2{}^2 = 0, \quad 4\, y_1 y_3 - y_2{}^2 = 0$$

dunque le formule di trasformazione delle coordinate sono $x_i = y_i$. Operando questa trasformazione sulla $\psi_1(y)$ essa diviene

$$\psi_1(x) = x_1\, a\, c + x_2\, V + x_3\, b\, d = 0$$

e poichè prima della trasformazione era:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} = (a\, c),\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} = (V),\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y_3} = (bd)$$

sarà adesso:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = a\, c,\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = V,\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = b\, d$$

cioè saranno ac, V, bd le polari di M, N, P rispetto a ψ_1 ossia

$$M \equiv M',\quad N \equiv N',\quad P \equiv P'.$$

Dunque le equazioni delle ψ e ψ_1 riferite al medesimo triangolo M, N, P sono:

$$\psi = x_1\, a\, b + x_2\, V + x_3\, c\, d = 0$$
$$\psi_1 = x_1\, a\, c + x_2\, V + x_3\, b\, d = 0$$

cioè, le equazioni di $a\,b$, V, $c\,d$, di $a\,c$, V, $b\,d$ riferite a tal triangolo debbono esser tali da potersi riguardare le prime come 1^e derivate parziali di una stessa ψ, le seconde come 1^e derivate parziali di una stessa ψ_1. Si hanno dunque le seguenti condizioni rispettive:

$$a_2\, b_2 = v_{12},\quad 2\, a_3\, b_3 = c_1\, d_3 + c_3\, d_1,\quad 2\, v_{11} = a_1\, b_2 + a_2\, b_1$$
$$a_1\, b_3 + a_3\, b_1 = 2\, c_1\, d_1,\quad a_2\, b_3 + a_3\, b_2 = 2\, v_{13} = c_1\, d_2 + c_2\, d_1$$
$$2\, v_{33} = c_2\, d_3 + c_3\, d_2,\quad 2\, v_{23} = c_2\, d_2$$

$$a_2\, c_2 = v_{12},\quad 2\, a_3\, c_3 = b_1\, d_3 + b_3\, d_1,\quad 2\, v_{11} = a_1\, c_2 + a_2\, c_1$$
$$a_1\, c_3 + a_3\, c_1 = 2\, b_1\, d_1\quad a_2\, c_3 + a_3\, c_2 = 2\, v_{13} = b_1\, d_2 + b_2\, d_1$$
$$2\, v_{33} = b_2\, d_3 + b_3\, d_2,\quad 2\, v_{23} = b_2\, d_2$$

da cui segue

$$b_1 = c_1,\quad b_2 = c_2,\quad b_3 = c_3\,.$$

Ossia le due bitangenti b e c debbono coincidere: la quartica non è più generale.

Facciamo ora il caso di avere due serie del 2° tipo. Dico che neppur queste possono avere la medesima conica φ. Siano esse:

$$(a\,b,\ c\,d,\ ef,\ g\,h,\ i\,j,\ k\,l)\,; \tag{1}$$

$$(a\,m,\ c\,n,\ e\,u,\ g\,x,\ i\,z,\ k\psi)\,. \tag{2}$$

Insieme a queste si dimostra l'esistenza anche di quest'altra (§ 11)

$$(a\,f,\ n\,v,\ b\,e,\ p\,x,\ r\,z,\ t\psi) \tag{3}$$

la quale con la (2) forma una coppia di serie di 2° tipo, ma con la (1) ne forma una di 1° tipo: se dunque due serie qualunque di 2° tipo avessero la stessa conica φ, questa sarebbe comune alle serie (1) e (2) e (2) e (3) e quindi alle (1) e (3) che sono di 1° tipo, il che si è visto che non può accadere senza che la quartica si specializzi. Dunque:

Esistono in generale 63 coppie di curve direttrici φ e ψ uua per ogni serie e quindi 63 modi diversi di riguardare una cubica come inviluppo delle coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ.

12. — Mediante questa definizione di una quartica si viene a stabilire fra essa e la φ una corrispondenza (4, 1) di cui ora vogliamo cercare le formole. Per maggiore semplicità scriviamo la ψ sotto la forma canonica

$$\psi = x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3 = 0$$

e invece di riguardare la quartica come inviluppo delle coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ, pensiamola come luogo di un punto y la cui retta polare inviluppa la conica $\varphi = \alpha^2{}_u = 0$. La polare è:

$$x_1\,\{y_1{}^2 + 2\,m\,y_2\,y_3\} + x_2\,\{y_2{}^2 + 2\,m\,y_3\,y_1\} + x_3\,\{y_3{}^2 + 2\,m\,y_1\,y_2\} = 0$$

per consegnenza l'equazione della quartica sarà:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\,\{y_1{}^2 + 2\,m\,y_2\,y_3\}^2 + \alpha_{22}\,\{y_2{}^2 + 2\,m\,y_3\,y_1\}^2 + \alpha_{33}\,\{y_3{}^2 + 2\,m\,y_1\,y_2\}^2 +\\ + 2\,\alpha_{12}\,\{y_1{}^2 + 2\,m\,y_2\,y_3\}\,\{y_2{}^2 + 2\,m\,y_3\,y_1\} + 2\,\alpha_{13}\,\{y_1{}^2 +\\ + 2\,m\,y_2\,y_3\}\,\{y_3{}^2 + 2\,m\,y_1\,y_2\} + 2\,\alpha_{23}\,\{y_2{}^2 + 2\,m\,y_3\,y_1\}\,\{y_3{}^2 +\\ + 2\,m\,y_1\,y_2\} = 0\end{aligned}$$

ovvero, mettendo in evidenza, l'invariante assoluto di ψ:

$$m^2\,f_1 + m\,f_2 + f_3 = 0 \tag{1}$$

dove

$$f_1 = \alpha_{11}\, y_2^2\, y_3^2 + \alpha_{22}\, y_3^2\, y_1^2 + \alpha_{13}\, y_1^2\, y_2^2 +$$
$$+ \alpha_{12}\, y_1\, y_2\, y_3^2 + \alpha_{13}\, y_1\, y_2^2\, y_3 + \alpha_{23}\, y_1^2\, y_2\, y_3$$
$$f_2 = \alpha_{11}\, y_1^2\, y_2\, y_3 + \alpha_{22}\, y_2^2\, y_3\, y_1 + \alpha_{33}\, y_3^2\, y_1\, y_2 +$$
$$+ \alpha_{12}\, y_3\, (y_1^3 + y_2^3) + \alpha_{13}\, y_2\, (y_1^3 + y_3) + \alpha_{13}\, y_1\, (y_2^3 + y_3^3$$
$$f_3 = \alpha_{11}\, y_1^4 + \alpha_{22}\, y_2^4 + \alpha_{33}\, y_3^4 + 2\, \alpha_{12}\, y_1^2\, y_2^2 + 2\, \alpha_{13}\, y_1^2\, y_3^2 +$$
$$+ 2\, \alpha_{23}\, y_2^2\, y_3^2\,.$$

Così sono riferite le tangenti della conica φ alle quaterne dei punti della quartica mediante le relazioni

$$u_1 = y_1^2 + 2\, m\, y_2\, y_3$$
$$u_2 = y_2^2 + 2\, m\, y_3\, y_1$$
$$u_3 = y_3^2 + 2\, m\, y_1\, y_2\,.$$

Ma fra le coordinate della tangente e quelle del punto di contatto passano le relazioni

$$x_i = \alpha_{i_1}\, u_1 + \alpha_{i_2}\, u_2 + \alpha_{i_3}\, u_3$$

quindi le formule richieste saranno le seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}\,\{y_1^2 + 2 m y_2 y_3\} + \alpha_{12}\,\{y_2^2 + 2 m y_3 y_1\} + \alpha_{13}\,\{y_3^2 + 2 m y_1 y_2\} \\ x_2 = \alpha_{21}\,\{y_1^2 + 2 m y_2 y_3\} + \alpha_{22}\,\{y_2^2 + 2 m y_3 y_1\} + \alpha_{23}\,\{y_3^2 + 2 m y_1 y_2\} \\ x_3 = \alpha_{31}\,\{y_1^2 + 2 m y_2 y_3\} + \alpha_{32}\,\{y_2^2 + 2 m y_3 y_1\} + \alpha_{33}\,\{y_3^2 + 2 m y_1 y_2\}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Esse stabiliscono una trasformazione quadratica del piano in sè stesso che è la più generale possibile perchè le rette del piano vengono a essere riferite projettivamente alla rete delle coniche polari rispetto a una cubica ψ che è generica.

La corrispondenza (1,4) fra una conica direttrice e la quartica è contenuta nella corrispondenza quadratica generale (2).

13. — Le formule precedenti si prestano con semplicità allo studio di casi particolari notevoli, fra i quali per prima quelli per cui $m = 0$, $m = \infty$.

Per $m = 0$ la cubica direttrice è equianarmonica, la trasformazione (2) si mantiene sempre quadrupla, solamente si specializza la rete delle coniche sul piano quadruplo acquistando esse per comune triangolo autopolare il triangolo hessiano della cubica direttrice. La quartica generata non ha punti singolari e poichè la sua equazione (1) è simmetrica in $\pm x_1$, in $\pm x_2$, in $\pm x_3$ ne viene che *esistono 3 omologie armoniche che la trasformano in sè stessa e di cui gli elementi fondamentali sono quelli del triangolo hessiano suddetto.*

Viceversa ogni quartica la cui equazione sia simmetrica in $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$ può esser generata mediante una cubica ψ equianarmonica. Si vede subito che una delle due omologie è il prodotto delle altre due. In altre parole se al punto A_1 corrispondono rispettivamente $A_2\,A_3\,A_4$ nelle tre omologie, ne viene di conseguenza che per effetto della 1ª omologia mentre A_1 va in A_2, A_3 va in A_4; per effetto della 2ª, mentre A_1 va in A_3, A_2 va in A_4 e per effetro della 3ª mentre A_1 va in A_4, A_2 va in A_3. Più brevemente, si può dire che una qualunque delle tre omologie permuta fra loro i 4 punti $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$. Diremo che essi costituiscono un *ciclo.*

Una qualunque conica polare rispetto a ψ ha il triangolo hessiano come triangolo autopolare, dunque (§ 3) o tocca la quartica nei 4 punti di un ciclo se il polo si trova sopra φ, ovvero la taglia in due cicli se il suo polo si trova fuori di φ. Segue:

I cicli esistenti sulla quartica sono rappresentati sopra i punti della conica φ.

I 4 punti di un ciclo sono punti di contatto di una conica con la quartica.

Qualunque conica che contenga un ciclo, ne contiene necessariamente un altro (§ 8).

Due cicli si trovano sempre sopra una conica.

In una omologia armonica a un flesso deve corrispondere un flesso. Dunque:

I 24 flessi della quartica si distribuiscono in sei cicli ma due cicli appartengono a una conica, quindi:

I 24 flessi si trovano a 8, a 8 sopra 15 coniche aventi per triangolo autopolare il triangolo hessiano (*).

La conica armonica alla serie di coniche che toccano la quartica nei cicli, deve tagliare l'hessiana di ψ nei sei punti corrispondenti a quelli nei quali l'hessiana stessa taglia la conica φ sostegno della serie. Dunque:

Per ogni vertice del triangolo hessiano passano quattro bitangenti della quartica, ecc.

(*) Gerbaldi, loc. cit.

Per $m = \infty$ la cubica direttrice è un triangolo, la (2) diviene l'ordinaria trasformazione quadratica biuuivoca, la quartica generata ha tre punti doppi nel triangolo fondamentale. Se la conica $\varphi = \alpha^2_u = 0$ si riduce a un punto contato due volte, la quartica ha tre cuspidi. La generazione di essa come inviluppo delle coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ perde significato; si mantiene però l'altro modo di esprimere la stessa generazione per cui la quartica si riguarda come il luogo di un punto le cui rette polari rispetto a ψ toccano φ, cioè passano per il punto a cui è ridotto ψ. Se questo punto è il centro del cerchio circoscritto al triangolo ψ, la quartica generata è l'ipocicloide di Steiner. Si ha quindi la seguente definizione di tale curva come caso particolare di quella data al § 10:

L'ipocicloide di Steiner si può riguardare come il luogo del polo variabile, rispetto a un triangolo, di una retta che ruota attorno al centro del cerchio circoscritto al triangolo. Quando sia noto questo centro la costruzione è lineare.

14. — Andiamo ora al secondo dei casi enunciati al § 9. Riprendiamo quindi la solita equazione della serie

$$\lambda^2 a^2_x + 2\lambda b^2_x + c^2_x = 0 . \tag{1}$$

Si tratta di esaminare se le coniche di questa serie si possano riguardare come polari dei punti di una retta φ rispetto a una quartica ψ di cui le equazioni siano rispettivamente $x_2 = 0$, $m^4_x = 0$. Le coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ individuano la serie:

$$y_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 y_1 y_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} + y_3^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = 0 \tag{2}$$

dove:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = m_{1111} x_1^2 + m_{1122} x_2^2 + m_{1133} x_3^2 + 2 m_{1112} x_1 x_2 + \\ + 2 m_{1113} x_1 x_3 + 2 m_{1123} x_2 x_3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} = m_{1311} x_1^2 + m_{1322} x_2^2 + m_{1333} x_3^2 + 2 m_{1312} x_1 x_2 + \\ + 2 m_{1313} x_1 x_3 + 2 m_{1323} x_2 x_3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = m_{3311} x_1^2 + m_{3322} x_2^2 + m_{3333} x_3^2 + 2 m_{3312} x_1 x_2 + \\ + 2 m_{3313} x_1 x_3 + 2 m_{3323} x_2 x_3 = 0 .$$

Vogliamo dimostrare che la (2) è una serie quadratica generale. Perciò confrontiamola con la (1), esaminiamo le condizioni che ne conseguono per i cofficienti della (1) e vediamo se queste condizioni specializzano effettivamente la serie, ovvero se dipendono da opportuna scelta degli elementi fondamentali.

Le condizioni suddette sono le seguenti:

$$a_{13} = b_{11}, \quad b_{23} = c_{12}, \quad b_{33} = c_{13}, \quad a_{23} = b_{12},$$
$$a_{33} = b_{13} = c_{11}$$

le quali esprimono che sul lato $x_2 = 0$ i due punti $A \equiv (1,0,0)$, $C \equiv (0,0,1)$ godono della proprietà che la polare di A rispetto a $b^2{}_x$ coincide con la polare di C rispetto a $a^2{}_x = 0$ e che la polare di A rispetto a $c^2{}_x = 0$ coincide con quella di C rispetto a $b^2{}_x = 0$, il che indicheremo brevemente con le notazioni

$$A_b = C_a, \quad A_c = C_b.$$

La questione è così ridotta a vedere se esistono due pnnti A e C i quali godano di queste proprietà.

Perciò consideriamo la collineazione composta delle 4 polarità seguenti: 1ª rispetto ad a, 2ª rispetto a b, 3ª rispetto a c, 4ª rispetto a b, e applichiamo questa collineazione a un punto C. Prendiamo la C_a polare di C rispetto ad a, di questa C_a cerchiamo il polo rispetto a b e sia A: intanto è realizzata la condizione

$$C_a = A_b$$

dopo, costruiamo la A_c polare di A rispetto a c e finalmente il polo di quest'ultima rispetto a b: otterremo così un punto C' che è il corrispondente di C nella collineazione in discorso. Se C' coincidesse con C sarebbe realizzata anche la seconda condizione:

$$A_c = C_b.$$

Dunque i tre punti uniti C_1 C_2 C_3 della projettività possono ognuno servire da punto C. Partendo da uno qualunque di essi C_i ed eseguendo le prime due polarità si giunge a un punto A_i il quale insieme a C_i risolve la questione proposta. Si osservi che A_i è distinto da C_i perchè se ciò non fosse ed entrambi coincidessero in un unico punto P, dalle condizioni precedenti si vedrebbe che P avrebbe la stessa retta polare rispetto alle tre coniche, la quale dunque si staccherebbe dalla jacobiana della loro rete; la serie sarebbe speciale. Dunque, in generale A_i è distinto da C_i. Si vede subito che A_i è unito nella projettività che si ottiene eseguendo le 4 polarità seguenti: 1ª rispetto a c, 2ª rispetto a b, 3ª rispetto ad a, 4ª rispetto a b. Riassumendo:

Date tre coniche in posizione generica, esistono 3 coppie di punti $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, $A_3 C_3$ tali che presi come punti $A_i \equiv (1, 0, 0)$, $C_i \equiv (0, 0, 1)$ i primi membri delle equazioni delle coniche si possono riguardare rispettivamente come le tre derivate seconde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}$$

di una medesima forma ternaria biquadratica ψ.

Una quartica generale può sempre considerarsi come l'inviluppo delle coniche polari dei punti di una retta φ *rispetto a un' altra quartica* ψ, *ovvero come il luogo di un punto la cui conica polare rispetto alla stessa quartica* ψ, *tocca la retta fissa* φ.

Adottando una definizione del Cremona (*) si può esprimere il teorema più brevemente così:

La seconda polare di una retta rispetto a una quartica generale, è di nuovo una quartica generale.

15. — Riprendiamo la serie quadratica di coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ. La retta φ taglia la hessiana di ψ in 6 punti le cui coniche polari costituiscono le 6 coniche della serie spezzate in coppie di rette: i 6 punti doppi di queste coniche stanno sulla steineriana di ψ e anche (§ 4) sulla conica armonica della serie. Dunque si può dire che:

I sei punti della steineriana di una quartica che corrispondono ai sei punti nei quali l' hessiana è incontrata da una retta qualunque, appartengono a una medesima conica.

16. — Analogamente a quanto fu fatto nel § 11 si tratta di vedere adesso da quali condizioni sono legate una retta e una quartica direttrici per generare una quartica secondo la definizione del § 14. Cominceremo perciò dal tener fissa la retta direttrice φ. Dal § 14 resulta che rimangono fissi i coefficienti: m_{1111}, m_{3333}, m_{1112}, m_{1113}, m_{1333}, m_{2333}, m_{1122}, m_{1133}, m_{2233}, m_{1123}, m_{1223}, m_{1233} e per conseguenza sono arbitrari: m_{2221}, m_{2222}, m_{2223} e quindi l' equa-

(*) *Curve piane*, § 104.

zione di ψ potrà scriversi:

$$\psi = \theta + x_2^3(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3) = 0$$

dove θ è la parte fissa e α, β, γ i coefficienti variabili. Dunque:

Per ogni retta che si può assumere come direttrice esiste un sistema lineare triplo di quartiche direttrici aventi tutte sulla retta medesima quattro contatti tripunto.

17. — Un punto comune alla quartica data e alla hessiana di una quartica direttrice ψ gode della proprietà che la sua conica polare deve spezzarsi in due rette ed esser tangente alla retta direttrice φ (§ 14). Cioè a un punto A comune all'hessiana di ψ e alla quartica data corrisponde un punto A' della steineriana di ψ situato sopra φ: ma i punti A sono 24, i punti A' sono 12 il che vuol dire che l'hessiana di ψ tocca dove incontra la quartica data.

Le hessiane delle quartiche direttrici inviluppano la quartica data.

18. — Per completare la questione del § 16 occorre vedere quali posizioni può assumere la retta direttrice φ.

Sia φ una retta generica del piano. Cerchiamo se sopra di essa esistano due punti A e C così che siano soddisfatte le due condizioni del § 14:

$$A_b = C_a\,, \quad A_c = C_b$$

dove a e c sono due coniche della serie che si considera e b è la conica che ne contiene gli otto punti di contatto con la quartica. Indichiamo con μ_1, μ_2 i parametri che individuano sulla φ i punti A e C, con λ_1, λ_2 i valori del parametro λ che nella serie data individuano a e c (la b dipende dalle prime due (§ 3)). Le due condizioni precedenti danno luogo a 4 equazioni che contengono non omogeneamente $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Esiste quindi almeno un numero finito di soluzioni.

Una quartica generale può sempre considerarsi come la seconda polare di una retta generica del piano rispetto a un'altra quartica che, fissata quella retta, varia in un sistema lineare ∞^3.

III.

AGGRUPPAMENTI DI BITANGENTI.

19. — Dal § 8 e dal § 6 resulta che " quattro bitangenti a b c d i cui 8 punti di contatto si trovano sopra una conica indivi-

duano tre serie diverse di coniche quadritangenti e cioè quelle determinate da ab, cd; ac, bd; ad, bc. Due di queste tre serie non possono avere altre bitangenti comuni a meno che la quartica non abbia un punto doppio (*).

Due coppie di bitangenti come ab, cd appartenenti alla stessa serie le chiameremo *congrue* e scriveremo $ab \equiv cd$, in caso contrario le chiameremo *incongrue* e scriveremo $ab \equiv\!|\!\equiv cd$. Con questa notazione il teorema precedente si esprime molto semplicemente così:

Se $ab \equiv cd$, *ne consegue* $ac \equiv bd$, $ad \equiv bc$.

20. — Con l'ajuto di questo teorema e con l'osservazione fatta sopra, che due serie individuate da ab, cd e da ac, bd non possono avere altre bitangenti comuni, è facile scrivere il prospetto delle 63 serie di coniche quadritangenti desumendolo dalle 6 coppie di bitangenti che ogni serie contiene. A noi occorrono le seguenti (**):

$$ab \equiv cd \equiv ef \equiv gh \equiv ij \equiv kl \tag{1}$$

$$ac \equiv bd \equiv mn \equiv op \equiv qr \equiv st \tag{2}$$

$$ad \equiv bc \equiv uv \equiv wx \equiv yz \equiv \varphi\psi \tag{3}$$

$$ae \equiv bf \equiv mu \equiv ow \equiv qy \equiv t\psi \tag{4}$$

$$af \equiv be \equiv nv \equiv px \equiv rz \equiv t\psi \tag{5}$$

$$am \equiv cn \equiv eu \equiv gx \equiv iz \equiv k\psi \tag{6}$$

$$an \equiv cm \equiv fv \equiv hw \equiv jy \equiv l\psi \tag{7}$$

$$bm \equiv dn \equiv uf \equiv hx \equiv jz \equiv l\psi \tag{8}$$

Si rileva facilmente che due serie qualunque o hanno 4, ovvero 6 bitangenti comuni (***). Nel 1° caso sono del tipo

$$ab \equiv cd \equiv ef \equiv gh \equiv ij \equiv kl$$

$$ac \equiv bd \equiv mn \equiv op \equiv qr \equiv st .$$

(*) Salmon, loc. cit. § 258.

(**) Salmon, loc. cit. § 259.

(***) Humbert, *Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre.* Journal de Mathématiques (Résal), Tome VI.

Nel 2° caso sono dell'altro tipo

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l$$
$$a\,m \equiv c\,n \equiv e\,u \equiv y\,x \equiv i\,z \equiv k\,\psi\,.$$

Chiameremo le prime *serie congiunte di 1ª specie* e le seconde *serie congiunte di 2ª specie.* Occorrendo nominare nel primo caso le coppie $a\,b$, $c\,d$, $a\,c$, $b\,d$, le diremo *coppie di congiunzione.*

Una serie è congiunta di 1ª specie ad altre 30 e di 2ª specie ad altre 32.

Le serie congiunte di 1ª specie si presentano a gruppi di 3, a 3 tali che due qualunque di un gruppo sono congiunte fra loro. Ecco un esempio:

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l$$
$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv o\,p \equiv q\,r \equiv s\,t$$
$$a\,d \equiv b\,c \equiv u\,v \equiv w\,x \equiv y\,z \equiv \varphi\,\psi$$

Chiameremo un tal gruppo *gruppo di 1ª specie.* Esso esaurisce le 28 bitangenti.

Anche le serie congiunti di 2ª specie si presentano in gruppi analoghi di tre, a tre, così che due serie qualunque del gruppo sono congiunte. Chiameremo questi gruppi *gruppi di 2ª specie.*

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l$$
$$a\,m \equiv c\,n \equiv e\,u \equiv g\,x \equiv i\,z \equiv k\,\psi$$
$$b\,m \equiv d\,n \equiv u\,f \equiv h\,x \equiv j\,z \equiv l\,\psi$$

da cui si vede che:

In un gruppo di 2ª specie una qualunque delle serie è costituita dalle bitangenti non comuni delle altre due.

Un gruppo di 2ª specie contiene solamente 18 bitangenti. Vedremo in seguito (§ 22) a che cosa dà luogo l'insieme delle 10 rimanenti. Ogni gruppo di 1ª specie individua una conica che passa per i quattro punti di contatto delle bitangenti che formano la quaterna di congiunzione e viceversa. Dunque:

I gruppi di 1ª specie sono 315. Il che risulta anche dall'osservare che una serie appartiene a 15 gruppi di 1ª specie e che contando in tal modo i gruppi ognuno è contato 3 volte. (Quindi il numero cercato è $\frac{63.\,15}{3} = 315$).

Analogamente si vede che:

I gruppi di 2^a specie sono $\frac{16.\,63}{3} = 336$.

21. — Prendiamo un gruppo di prima specie:

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l$$
$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv o\,p \equiv q\,r \equiv s\,t$$
$$a\,d \equiv b\,c \equiv u\,v \equiv w\,x \equiv y\,z \equiv \varphi\,\psi\,.$$

Esistono serie congiunte di 2^a specie con ciascuna serie del gruppo?

La risposta è negativa. Infatti, ammettiamo che esista una serie congiunta di 2^a specie con le prime due: si vede subito che è congiunta di 1^a specie con la 3^a. Poichè la serie supposta avrebbe 6 bitangenti comuni con la 1^a serie, una in ogni coppia, altre 6 comuni con la 2^a serie: se fosse congiunta di 2^a specie anche con la 3^a serie, dovrebbe avere anche con questa a comune 6 bitangenti; cioè nella 3^a serie dovrebbero figurare 6 bitangenti appartenenti alle altre due; il che non è. Dunque le serie che sono congiunte di 2^a specie contemporaneamente con le prime due del gruppo vanno cercate fra le serie congiunte di 1^a specie con la 3^a del gruppo medesimo, cioè con la

$$a\,d \equiv b\,c \equiv u\,v \equiv w\,x \equiv y\,z \equiv \varphi\,\psi.$$

E ora si vede subito che se una delle coppie di congiunzione è $a\,d$, ovvero $b\,c$, si trovano effettivamente serie congiunte di 2^a specie con le prime due del gruppo, altrimenti no.

Non esistono serie congiunte di 2^a specie con tutte e tre le serie di un gruppo di 1^a specie.

Date due serie congiunte di 1^a specie fra loro, ne esistono 16 che sono congiunte di 2^a specie con entrambe.

Un esempio è il seguente: date le due congiunte di 1^a specie

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l\,; \quad a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv p\,o \equiv r\,q \equiv t\,s$$

la:

$$a\,u \equiv d\,v \equiv e\,m \equiv h\,p \equiv i\,r \equiv k\,s$$

è congiunta di 2^a specie con entrambe.

22. — Sia un gruppo di 2^a specie:

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l$$
$$a\,m \equiv c\,n \equiv e\,u \equiv g\,x \equiv i\,z \equiv k\,\psi$$
$$b\,m \equiv d\,n \equiv u\,f \equiv h\,x \equiv j\,z \equiv l\,\psi.$$

Per ottenere una serie congiunta di 1ª specie con le prime due basta costruire una serie congiunta di 1ª specie con una qualunque di esse prendendo per una sua coppia due bitangenti comuni alle due serie. La serie che si ottiene è congiunta di 1ª specie non soltanto alle prime due, ma anche alla terza. P. es. la:

$$ac \equiv bd \equiv mn \equiv op \equiv qr \equiv st$$

da cui si vede che le serie congiunte di 1ª specie con tutt'e tre le serie del gruppo dato sono costituite da tre coppie di congiunzione e da altre 6 bitangenti che appartengono alle 10 bitangenti escluse dal gruppo dato di 2ª specie. Dunque:

Una serie congiunta di 1ª specie con due di un gruppo di 2ª specie è congiunta di 1ª specie anche con la terza serie del gruppo.

Esistono 15 serie congiunte di 1ª specie con tutt'e tre le serie di un gruppo di 2ª specie.

Le 10 bitangenti che rimangono escluse da un gruppo di 2ª specie costituiscono 45 coppie esistenti a tre, a tre nelle 15 serie congiunte di 1ª specie al gruppo dato: le altre tre coppie in ogni serie sono coppie di congiunzione.

23. — Per procedere oltre nello studio delle configurazioni nascenti da particolari aggruppamenti di tangenti doppie è necessario citare il seguente teorema dovuto a Aronhold (*) e riprodotto dopo da vari autori (**). Siano due serie congiunte di prima specie $ab \equiv cd \equiv \ldots$; $ac \equiv bd \equiv \ldots$ e siano mn, ef due coppie qualunque rispettivamente della 1ª e della 2ª serie. Allora, il teorema sopracitato stabilisce che le due terne di punti

$$bc,\ fn,\ me \qquad ad,\ ne,\ fm$$

appartengono a due rette; che esistono 5040 di queste rette le quali passano a 40, a 40 per ogni punto comune a due bitangenti. Vogliamo studiare un po' più da vicino queste rette che chiameremo rette ρ.

(*) *Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve 4ten Grades.* Monatsberichte, Berlin, 1864.

(**) Salmon, loc. cit., §§ 258, 266. — De Paolis, *La trasformazione piana doppia e la sua applicazione alle quartiche* (Acc. Lincei, Memorie, 1877-78).

24. — La prima questione che si presenta è la seguente:

Date due coppie di bitangenti a piacere $s\,t$, $p\,q$, esiste un criterio semplice per giudicare se i punti $s\,t$, $p\,q$ appartengono a una retta ρ? Siano le rette ρ del § precedente

$$b\,c,\quad f\,n,\quad m\,e$$
$$a\,d,\quad n\,e,\quad f\,m.$$

Per ottenerle si sono prese le due serie congiunte di 1ª specie

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv \ldots$$
$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv \ldots$$

dove $e\,f$, $m\,n$ erano due coppie qualunque delle due serie con la sola condizione di esser diverse dalle coppie di congiunzione: poi si è costruito il quadrilatero $e\,f\,m\,n$: una diagonale è la $e\,f \cdot m\,n$ congiungente le due coppie date $e\,f$, $m\,n$: le altre due diagonali sono appunto le due rette ρ e ciascuna passa per uno degli altri due vertici del quadrilatero $a\,b\,c\,d$ che sono diversi da quelli che forniscono le due coppie di congiunzione. Questa proprietà che caratterizzerebbe le coppie segantesi sopra una retta ρ, oltre non esser semplice, ha lo svantaggio di far comparire in modo non simmetrico le tre coppie perchè essa pone in condizioni diverse le due coppie $f\,n$, $m\,e$ della coppia $b\,c$ nella 1ª retta ρ, e in condizioni ugualmente diverse le due coppie $n\,e$, $f\,m$ della coppia $a\,d$ nella 2ª retta ρ. Invece risulterà dalle considerazioni che seguono come le tre coppie di una ρ vi compariscano simmetricamente.

25. — Per questo ci varremo delle serie scritte al § 20. La (5) di quel § ci dice che $a\,f \equiv n\,v$, dunque (§ 19) sarà $f\,n \equiv a\,v$. Analogamente la (3) del medesimo § dà $a\,v \equiv d\,u$, $a\,u \equiv d\,u$, e la (4) $a\,u \equiv m\,e$. Quindi si ha il gruppo di 1ª specie (§ 20):

$$a\,v \equiv d\,u \equiv f\,n \equiv \ldots$$
$$a\,u \equiv d\,v \equiv m\,e \equiv \ldots$$
$$a\,d \equiv u\,v \equiv b\,c \equiv \ldots$$

il che prova che due qualunque delle tre coppie $b\,c$, $f\,n$, $m\,e$ della retta ρ si possono riguardare come appartenenti a due serie congiunte di 1ª specie ma diverse dalle coppie di congiunzione. Così apparisce intanto come le tre coppie di una ρ siano in condizioni simmetriche le une rispetto alle altre.

Viceversa, prese due coppie come ef, mn appartenenti a due serie congiunte di 1ª specie e diverse dalle coppie di congiunzione, dico che esse giacciono sopra una retta ρ. Per convincersene basta prendere le due serie congiunte di 1ª specie:

$$av \equiv du \equiv fn \equiv \ldots$$
$$au \equiv dv \equiv me \equiv \ldots$$

e osservare che ad esse è applicabile il medesimo processo che il Salmon ad esempio applica (§ 258) alle due serie congiunte di 1ª specie $ab \equiv cd \equiv ef \ldots$, $ac \equiv bd \equiv mn \equiv \ldots$ per ottenerne due rette ρ. Nel nostro caso quello stesso processo conduce alle due rette ρ seguenti:

$$uv,\ ef,\ mn; \quad ad,\ ne,\ fm.$$

Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due coppie di bitangenti ef, mn abbiano i loro punti ef, mn sopra una stessa retta ρ è che le due coppie appartengano a due serie congiunte di 1ª specie e siano diverse dalle coppie di congiunzione.

Segue che le 63 coniche armoniche alle 63 serie non possono spezzarsi in coppie di rette ρ perchè le coppie di bitangenti di una retta ρ sono a due, a due incongrue:

Dato un quadrilatero di bitangenti, se una diagonale è una retta ρ, anche le altre due diagonali sono rette ρ.

26. — Sopra i gruppi di 1ª e di 2ª specie abbiamo poi i seguenti teoremi di cui il 1° discende subito dalle considerazioni precedenti:

In un gruppo di prima specie, le 18 coppie di bitangenti delle tre serie che lo compongono sono così costituite che i 18 punti di incontro delle 2 bitangenti di ciascuna coppia, stanno sei, a sei sopra le tre coniche armoniche alle serie: 6 sono dati dalle coppie di congiunzione e sono i vertici del quadrilatero formato con le 4 bitangenti comuni alle 3 serie; gli altri 12 giacciono a 3, a 3 sopra 16 rette ρ. Questa configurazione esaurisce tutte le 28 bitangenti.

Il numero di tali configurazioni è 315 (§ 20).

Di qui si trova che il numero delle rette ρ è $315 . 16 = 5040$.

Le 18 bitangenti di un gruppo di 2ª specie danno luogo a 6 triangoli aventi ciascuno un vertice sopra ciascuna delle 3 coniche armoniche alle 3 serie che compongono il gruppo.

27. — La (5) § 20 è:

$$af \equiv nv \equiv be \equiv \ldots$$

segue (§ 19):

$$bn \equiv ev$$

ma dalla (2) (§ 20);

$$bn \equiv dm$$

per cui:

$$bn \equiv ev \equiv dm \equiv \ldots \qquad (9)$$

segue:

$$de \equiv mv$$

e dalla (1) (§ 20)

$$de \equiv cf$$

onde:

$$de \equiv mv \equiv cf \equiv \ldots \qquad (10)$$

Allora esistono le seguenti coppie di serie congiunte di 1ª specie

$$1^\circ \begin{cases} ab \equiv cd \equiv ef \equiv \ldots & (1)\ (\S\ 20) \\ ac \equiv bd \equiv mn \equiv \ldots & (2)\ (\text{id.}) \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} af \equiv nv \equiv be \equiv \ldots & (5)\ (\S\ 20) \\ an \equiv fv \equiv cm \equiv \ldots & (7)\ (\text{id.}) \end{cases}$$

$$3^\circ \begin{cases} ev \equiv dm \equiv bn \equiv \ldots & (9)\ (\S\ 4) \\ de \equiv mv \equiv fc \equiv \ldots & (10\ \ (\text{id.}) \end{cases}$$

Applicando a tutt' e tre queste coppie di serie il teorema che al § 23 è stato applicato solamente alla prima coppia si hanno le seguenti rette ρ:

$$(1) \begin{cases} \rho = bc,\ fn,\ me \\ \rho_1 = ad,\ ne,\ fm \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \rho = fn,\ bc,\ me \\ \rho_2 = av,\ bm,\ ec \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \rho = em,\ fn,\ bc \\ \rho_3 = dv,\ bf,\ nc. \end{cases}$$

Così a una retta ρ sono associate le altre tre:

$$\rho_1 = a\,d,\ n\,e,\ f\,m$$
$$\rho_2 = a\,v,\ e\,c,\ b\,m$$
$$\rho_3 = d\,v,\ n\,c,\ b\,f$$

sopra ognuna delle quali hanno un vertice ciascuno dei tre triangoli:

$$a\,d\,v\,,\quad e\,n\,c\,,\quad m\,f\,b$$

ma gli ultimi due sono prospettivi a causa della esistenza della retta $\rho = b\,c,\ f\,n,\ m\,e$, dunque le rette $\rho_1\,\rho_2\,\rho_3$ s'incontrano in uno stesso punto R.

Intanto si può dire che:

Esistono degli aggruppamenti di 9 bitangenti costituiti ciascuno da tre triangoli prospettivi con la ulteriore particolarità che il centro di prospettiva è il medesimo per tutt' e tre le coppie di triangoli e sono pure le medesime le congiungenti i vertici corrispondenti.

28. — Riprendiamo i triangoli $a\,d\,v$, $e\,n\,c$, $m\,f\,b$ e le tre rette ρ che ne contengono ognuna tre vertici corrispondenti:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= a\,d,\ n\,e,\ f\,m \\ \rho_2 &= a\,v,\ e\,c,\ b\,m \\ \rho_3 &= d\,v,\ n\,c,\ b\,f \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

i triangoli precedenti danno luogo alle tre coppie:

$$a\,d\,v,\ e\,n\,c;\quad a\,d\,v,\ m\,f\,b;\quad e\,n\,c,\ m\,f\,b$$

i cui casi di prospettivi sono le tre rette ρ:

$$\left.\begin{aligned} \rho'_1 &= a\,e,\ n\,d,\ c\,v \\ \rho'_2 &= a\,m,\ f\,d,\ b\,v \\ \rho_3 &= e\,m,\ f\,n,\ b\,c\,. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Ora sopra ciascuna di queste tre rette ha un vertice ognuno di tre triangoli:

$$a\,e\,m,\quad d\,n\,f,\quad v\,c\,b$$

che sono prospettivi a causa delle (1), anzi le (1) sono gli assi di prospettiva delle tre coppie. Dunque anche le rette $\rho_1'\,\rho_2'\,\rho_3'$ concorrono in uno stesso punto R.

Ai triangoli di bitangenti adv, enc, mfb, *prospettivi da un medesimo centro, fanno riscontro i triangoli* aem, dnf, vcb *prospettivi da un altro centro, così che gli assi di prospettiva delle coppie di triangoli contenuti nella prima terna sono le congiungenti i vertici corrispondenti nella seconda terna e viceversa. Gli assi di prospettiva sono sei rette* ρ *e a tre a tre passano per i due centri di prospettiva.*

Indicheremo con Ω la configurazione formata con le 9 bitangenti in discorso. A ogni configurazione Ω sono coordinate 6 rette ρ e due punti R.

29. — Il seguente lemma riesce evidente quando se ne costruisca la figura relativa:

Date 3 coppie di rette che si tagliano in 3 punti in linea retta, si possono formare con esse 4 coppie di triangoli prospettivi: i centri di prospettiva e le congiungenti i vertici corrispondenti sono vertici e lati di un quadrangolo completo.

Prendiamo per le tre coppie di rette date le tre coppie di bitangenti bc, fn, me che si tagliano in punti di una retta ρ. Si vede subito che le congiungenti i vertici corrispondenti dei triangoli prospettivi non sono altro che le diagonali dei quadrilateri $bcfn$, $bcme$, $fnme$ i quali hanno per diagonale comune la retta ρ. Dunque (§ 25) anche le altre diagonali sono rette ρ.

Il lemma precedente dà il seguente teorema:

Data una retta ρ, *con le 6 bitangenti che a due, a due si tagliano su di essa si possono formare 4 coppie di triangoli prospettivi: i centri di prospettiva e le congiungenti i vertici corrispondenti compongono un quadrangolo di quattro punti* R *e di sei lati* ρ.

30. — Segue che una retta ρ individua 4 punti R. Ma si vede facilmente che a uno stesso punto R si giunge mediante 3 rette ρ. P. es., detto R_1 il centro di prospettiva dei triangoli bfm, cne, si trova subito che si giunge a R_1 non solo considerando la retta bc, fn, me, ma anche le altre due ae, nd, cv; am, fd, bv scritte al § 29 sotto l'indicazione $(1)'$ e le quali alla lor volta concorrono in un punto R. Dunque il numero dei punti R è

$$\frac{5040 \cdot 4}{3} = 6720.$$

Segue che sopra ogni retta ρ sarà un numero X di punti R

tale che

$$\frac{5040 \, . \, X}{3} = 6720,$$

purchè per ogni punto R passino 3 rette ρ. Quindi $X = 4$. *Le 5040 rette ρ s'incontrano a 3, a 3 in 6720 punti R così che sopra ogni retta ρ esistono 4 punti R.*

Gli aggruppamenti Ω sono

$$\frac{6720}{2} = 3360.$$

31. — Riprendiamo un aggruppamento Ω; p. es. quello dei §§ 27 e 28 costituito dalle 9 bitangenti $a, d, v, e, n, c, m, f, b$ organizzate nelle due terne di triangoli:

$$adv, \; enc, \; mfb; \qquad aem, \; dnf, \; vcb.$$

Si riconosce subito che esiste una e una sola bitangente u tale che con ciascun triangolo dia luogo a due coppie di bitangenti congrue. Diremo che la bitangente u è *coordinata* all'aggruppamento Ω. Vogliamo dimostrare che se si sostituisce una qualunque delle bitangenti dell'aggruppamento: p. es. la v, con la u, si trova un nuovo aggruppamento Ω la cui bitangente coordinata è la v. Infatti: esistono le rette ρ seguenti (§ 23):

$$\rho_1 = ad, \; ne, \; fm, \qquad \rho'_1 = fn, \; bc, \; me.$$

Poi, si prenda la serie (4) e la (6) del § 20 e si troverà (§ 23) insieme alla ρ'_1 la $\rho_2 = au, \; bn, \; fc$; secondariamente si osservi che dalle (6) e (8) del § 20 medesimo si ha:

$$ec \equiv un \equiv df,$$

e quindi da questa e dalla (8) suddetta si ottiene insieme alla ρ'_1 la $\rho'_3 = ud, \; eb, \; mc$: ugualmente dalla (6) e dalla $ec \equiv un \equiv df$ risulta la esistenza della ρ_1 e della $\rho'_3 = af, \; uc, \; dm$, e così pure dalle (4) e (8) si trovano la ρ_1 e la $\rho'_2 = an, \; ub, \; de$. Quindi, riassumendo, si hanno le seguenti 6 rette ρ:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= ad, \; ne, \; fm \\ \rho_2 &= au, \; bn, \; fc \\ \rho_3 &= ud, \; be, \; mc \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\rho'_1 &= fn,\ bc,\ me\\ \rho'_2 &= an,\ ub,\ de\\ \rho'_3 &= af,\ uc,\ dm\end{aligned}\right\}\quad (1)'$$

il che significa che i triangoli di bitangenti

$$adu,\ enb,\ mfc;\qquad anf,\ ucb,\ dem,$$

formano un aggruppamento Ω c. d. d.

Dunque:

Le 9 bitangenti di un gruppo Ω e la bitangente x coordinata al gruppo sono in tal relazione che aggiungendo x al gruppo e togliendone una qualunque delle altre, il gruppo che risulta è ancora un gruppo Ω.

Si vede subito che le 18 bitangenti che si escludono assumendo un gruppo Ω e la bitangente coordinata costituiscono un gruppo di 2.ª specie, e viceversa.

Le 10 bitangenti che rimangono escluse da un gruppo di 2.ª specie costituiscono in 10 modi diversi un aggruppamento Ω con la relativa bitangente coordinata.

Ecco quindi una regola semplice per costruire un aggruppamento Ω: si prenda un gruppo di 2.ª specie e delle 10 bitangenti che non entrano nel gruppo se ne escluda una qualunque. Le 9 rimanenti costituiscono il gruppo cercato. Si ritrova così anche il numero dei gruppi Ω. Esso deve essere il decuplo del numero dei gruppi di 2.ª specie, cioè (§ 20): $336 . 10 = 3360$.

32. — Le rette ρ e i punti R si sono presentati anche a Geiser nella nota configurazione che egli ha immaginato per lo studio della quartica piana (*). Ma nel valutare il numero tanto delle rette ρ quanto dei punti R bisogna tener conto che tutta la configurazione è per così dire attaccata a una bitangente (che potrebbe dirsi fondamentale) della quartica e quindi quel che si dice per una tale bitangente si può ripetere per tutte prendendo successivamente tutte le bitangenti per bitangente fondamentale e costruendo volta per volta una nuova superficie cubica ausiliaria. Altrimenti la enumerazione suddetta non è esatta. Così p. es. il Geiser trova soltanto 720 rette ρ e 240 punti R. Riprendiamo qui

(*) *Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades.* Math. Ann., Band I.

tutta la figura di Geiser e con l'aiuto della notazione adottata, e di qualcuno dei teoremi già stabiliti, ritroveremo il numero dei punti R e delle rette ρ. Da quella figura risulta prima di tutto che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un triangolo di bitangenti sia immagine di un triangolo esistente sulla superficie cubica F_3, è che i 6 punti di contatto stieno sopra una conica la quale contenga anche i punti di contatto della bitangente fondamentale a.

Ora una bitangente fa parte di 27 coppie e ciascuna di esse è congrua ad altre 5, quindi il numero dei triangoli di bitangenti che sono immagini di triangoli esistenti in F_3 è $\frac{5 \,.\, 27}{3} = 45$. I 720 spigoli e i 240 vertici dei triedri di Steiner si projettano in 720 rette ρ e in 240 punti R. Una coppia di triedri conjugati si projetta in un aggruppamento Ω. Ma per bitangente fondamentale può esser presa una bitangente qualunque, quindi le rette ρ sono al massimo $28 \cdot 720$. Dico al massimo perchè si vede che una retta ρ è così contata 4 volte. Infatti sia la retta $\rho = bc, fn, me$ (§ 23). Le 3 coppie bc, fn, me appartengono alle 3 serie congiunte di 1.ª specie (§ 25):

$$av \equiv du \equiv fn \equiv \ldots$$
$$au \equiv dv \equiv me \equiv \ldots$$
$$ad \equiv uv \equiv bc \equiv \ldots$$

Allora, secondo l'osservazione precedente, sono projezioni di triangoli esistenti sulla F_3:

quando si prenda per bitangente fondamentale la a, i seguenti . . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} emu \\ bcd \\ fnv \end{array} \right.$

quando si prenda per bitangente fondamentale la u, i seguenti . . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} ema \\ bcv \\ fnd \end{array} \right.$

quando si prenda la v. . . . . $\left\{ \begin{array}{l} emd \\ bcu \\ fna \end{array} \right.$

quando si prenda la d. . . . . $\left\{ \begin{array}{l} emv \\ bca \\ fnu \end{array} \right.$

e ogni terna di triangoli dà la medesima retta $\rho = bc, fn, me$. Dunque il numero delle rette ρ è $\frac{720 \cdot 28}{4} = 5040$.

Ogni bitangente, assunta come fondamentale, dà origine a 120 aggruppamenti Ω. Viceversa si vede subito che una stessa fig. Ω non può provenire da due diverse bitangenti fondamentali perchè se esse fossero a e b e se mnp fosse un triangolo di Ω, dovrebbero trovarsi sopra una stessa conica i punti di contatto di a, b, m, n, p, cioè la quartica dovrebbe spezzarsi. Dunque le figure Ω sono $120 \cdot 28 = 3360$ e i punti R: $3360 \cdot 2 = 6720$. Segue anche: *Mentre un aggruppamento Ω è coordinato a una sola bitangente, una bitangente è coordinata a 120 aggruppamenti Ω. Ogni aggruppamento Ω può sempre pensarsi come la projezione di due triedri conjugati di Steiner.*

Dei 4 punti R esistenti sopra una retta ρ, uno qualunque, ma non più d'uno alla volta, può pensarsi come la projezione del vertice di un triedro di Steiner.

33. — Una bitangente a quanti aggruppamenti Ω appartiene? Sia a la bitangente data; b la bitangente coordinata al gruppo Ω. Supponiamo che a appartenga a Ω. Permutiamo a con b, troveremo (§ 31) un gruppo Ω_1 coordinato ad a e contenente b. Allora se scambiamo a con ogni bitangente di Ω_1 otteniamo 9 gruppi Ω che contengono a. Dunque ogni gruppo coordinato ad a dà 9 gruppi Ω cui a appartiene. Si vede facilmente che in questo modo di enumerazione ogni gruppo non è ripetuto. Dunque il numero cercato è $120 \cdot 9 = 1080$. Da cui si ritrova ancora il numero dei gruppi Ω uguale a

$$\frac{1080 \cdot 28}{9} = 3360.$$

Una bitangente fa parte di 1080 gruppi Ω.

Supponiamo fissata una bitangente fondamentale nella figura di Geiser. Togliamo i 120 gruppi Ω che esauriscono tutte le projezioni dei triedri di Steiner, togliamo i 1080 gruppi Ω a cui appartiene la bitangente fondamentale. Rimangono 2160 gruppi Ω ognuno costituito di 9 bitangenti le cui obbiettive sono rette esistenti sulla F_3 ma non costituenti coppie di triedri di Steiner conjugati, benchè la projezione del gruppo fatta da un punto della superficie non si distingua da quella di una coppia di triedri conjugati.